ITG “E. FERMI”

Iperbole

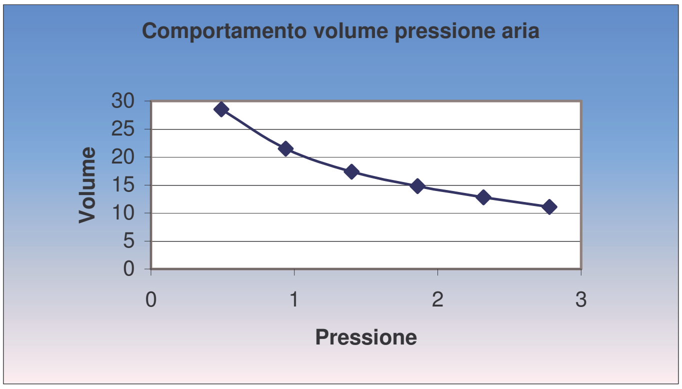
Di

Alessandro Menchetti
IIIBs a.s. 2008-2009

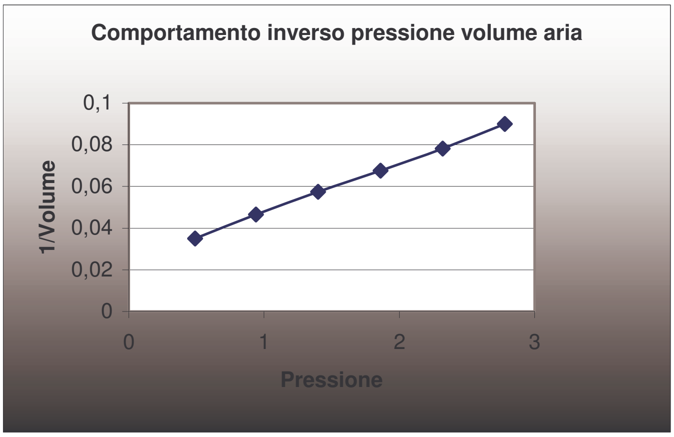
Per introdurre l'iperbole si inizia prendendo in considerazione le formule relative alla relazione tra volume e pressione dei gas, in particolare alla famosa legge di Boyle cioè condizioni di temperatura costante la pressione di un gas è inversamente proporzionale al suo volume, ovvero che il prodotto della pressione del gas per il volume da esso occupato è costante. Analizziamo le diverse connessioni tra pressione, volume e 1/volume dei gas che compongono l'aria, il propano e il biossido di carbonio in questa tabella:

Pressione ($N/m^2 \cdot 10^5$)	Volume ($m^3 \cdot 10^{-5}$)	1/Volume ($m^{-3} \cdot 10^3$)
Aria		
0,49	28,5	3,51
0,94	21,5	4,64
1,40	17,4	5,75
1,86	14,8	6,76
2,32	12,8	7,81
2,78	11,1	9,01
Propano		
0,64	25,5	3,92
1,07	19,7	5,08
1,52	16,4	6,10
2,01	14,0	7,14
2,47	12,1	8,26
2,93	10,8	9,26
Biossido di carbonio		
0,78	23,5	4,26
1,24	18,5	5,41
1,69	15,5	6,45
2,16	13,3	7,52
2,61	11,7	8,55
3,08	10,3	9,71

Vediamo in modo più semplice, attraverso un grafico, come si comportano i dati dell'aria di pressione e volume:



Da questo grafico ci si rende conto che, con l'aumentare del volume, la pressione diminuisce. Si nota anche che, unendo i punti ottenuti dai dati sopra proposti, si va a formare una curva. Vediamo cosa succede se, nel grafico, poniamo come coordinate i dati relativi a pressione e 1/volume:



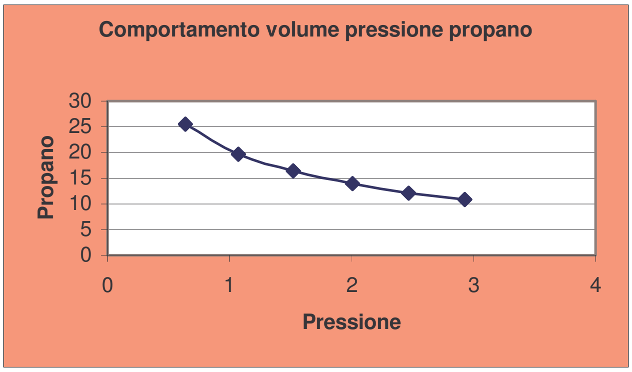
Qui si può notare che, unendo i punti, si forma una linea che sale costantemente, quindi si può dedurre che tra pressione e l'inverso del volume ci sia una costante. Perciò se moltiplico l'inverso del volume con la costante mi darà sempre la pressione relativa:

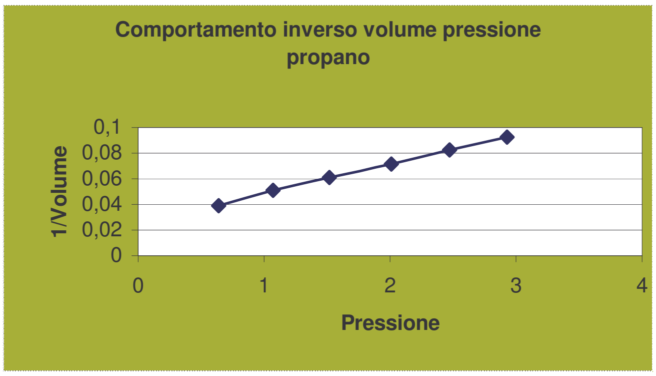
1/Volume · Costante = Pressione

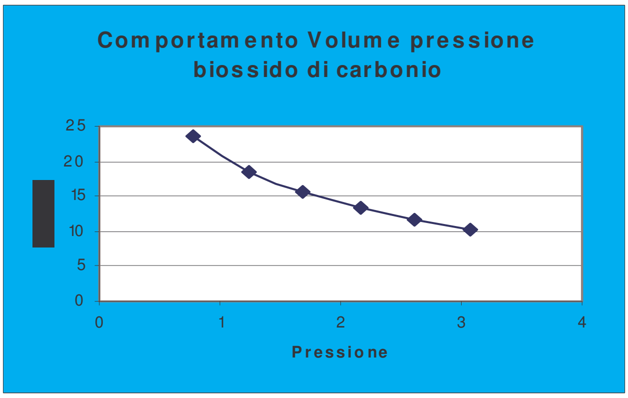
Ponendola in lettere diventa:

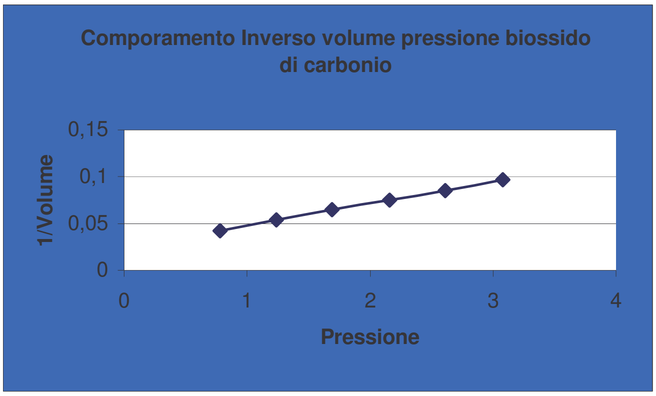
$$1/V \cdot K = P$$

Vediamo come si comportano nei grafici gli altri due gas:









Si vede chiaramente che tutti questi gas reagiscono nel grafico in modo abbastanza simile quindi la formula sopra citata è valida per tutti i tipi di gas.
Tale formula può essere opportunamente cambiata in

$$P \cdot V = K$$

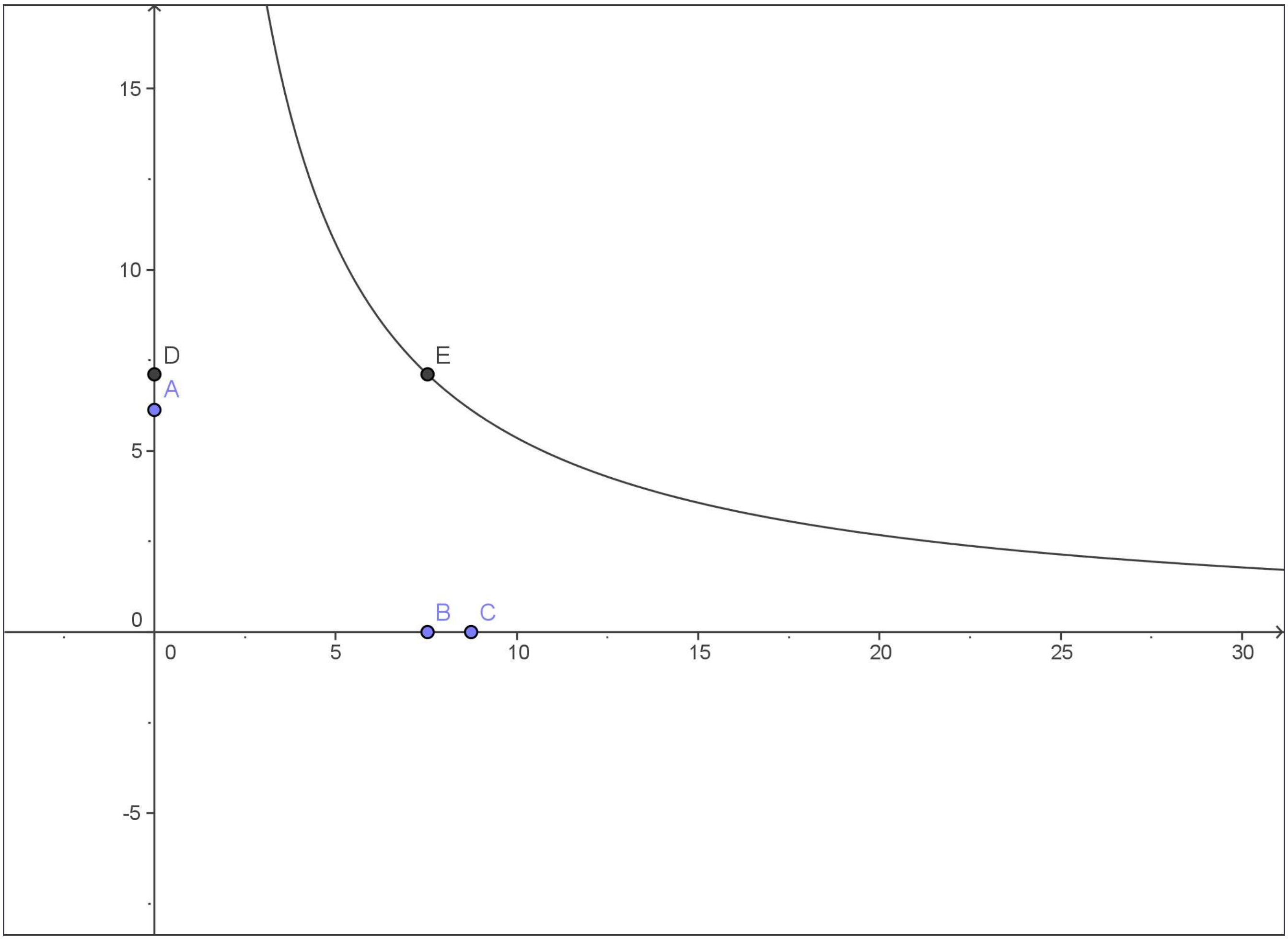
Eccoci arrivati alla formula di Boyle.
Se proviamo ad applicare questa formula ai dati dei gas vediamo come il volume moltiplicato alla sua pressione da sempre la stessa costante: ciò significa che ad ogni x equivale un solo valore y e viceversa. Se applicata ad un piano cartesiano, questa formula disegna una curva come abbiamo visto prima. Il termine "curva" è impreciso poiché si tratta di una Iperbole equilatera riferita agli asintoti.

Costruzione di una iperbole

Vediamo quindi come costruire un iperbole sul piano cartesiano utilizzando il software GeoGebra:

1. Prendere due punti qualsiasi A sull'asse y e B sull'asse x
2. Tracciare retta (a) passante per A e B
3. Prendere punto C su asse x
4. Tracciare retta (b) parallela ad (a) e passante per C
5. Porre punto D il punto di intersezione tra (b) e asse y
6. Tracciare retta (c) parallela ad asse x e passante per D
7. Tracciare retta (d) parallela ad asse y e passante per B
8. Porre punto E il punto di intersezione tra retta (c) e (d)
9. Costruire luogo tra E e B

Si può notare che spostando il punto B sull'asse x, il punto E si muove lungo il luogo costruito. Ecco una immagine a lavoro finito:

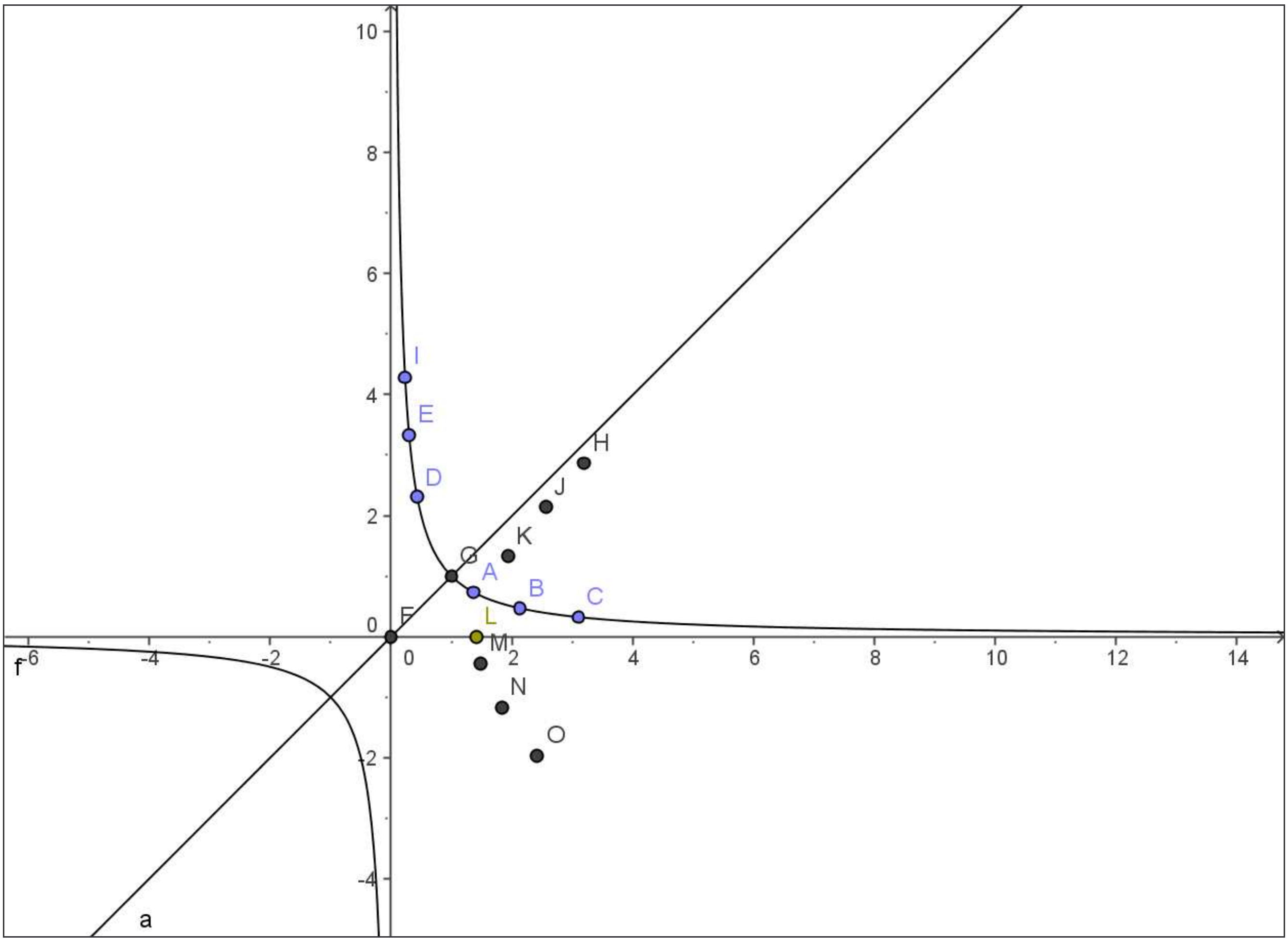


Per comodità ho nascosto le rette (a)(b)(c)(d). Notare come la linea dell'iperbole si avvicini agli assi senza mai intersecarli: questo fenomeno è chiamato "movimento asintotico".

Costruzione iperbole ruotata

1. Costruire un iperbole immettendo la sua equazione (su GeoGebra bisogna immettere f(x)=1/x)
2. Prendere i punti A,B,C,D,E sull'iperbole e il punto F sull'origine degli assi
3. Tracciare la retta (a) con equazione y=x
4. Porre punto G l'intersezione tra la retta (a) e l' iperbole
5. Ruotare tutti i punti dell'iperbole di 45° in senso orario rispetto ad F

Alla fine si ha un quadro di questo genere:



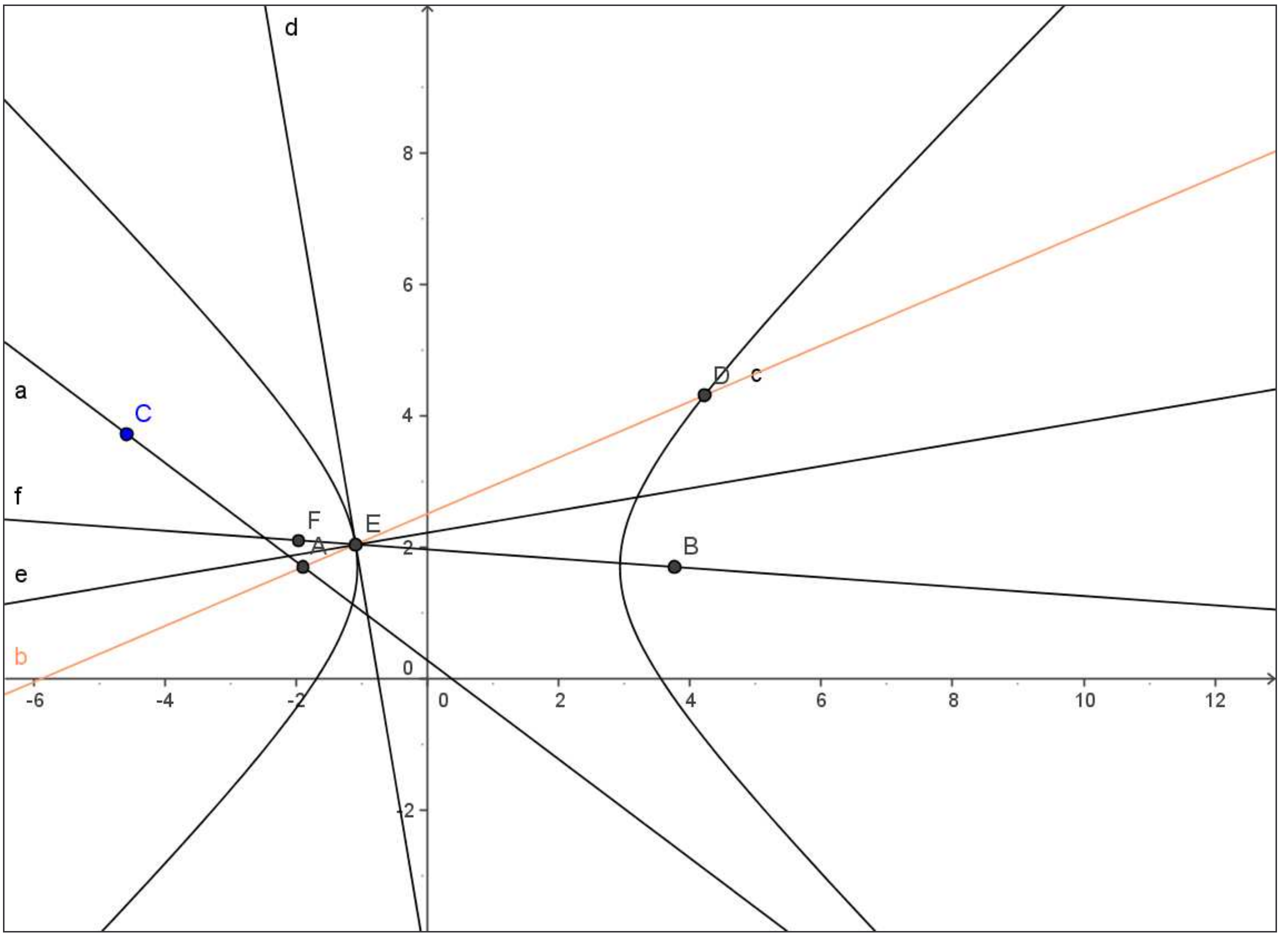
Ci si accorge che unendo i punti ruotati si ottiene un'altra iperbole che però non rispetta l'equazione yx=k in quanto, passante per l'asse x, si avranno dei punti con valore di y=0, quindi sostituendolo alla equazione di prima si avrà un k=0, perciò questa iperbole è degenere. (Il punto L è evidenziato poiché è il risultato del punto G ruotato e quindi si trova sull'asse x).
NOTA: nel disegno si vede che l'iperbole, oltre ad essere nel 1° quadrante si presenta anche nel 3° per il semplice motivo per cui x e y dell'equazione possono essere considerati entrambi positivi o entrambi negativi.

Costruzione iperbole mediante ottica

1. Tracciare un iperbole (c) come una lente
2. Usare la funzione "fuoco" sull'iperbole per trovare i punti di fuoco A e B
3. Si prende un punto C nel quarto quadrante prima del fuoco A
4. Si traccia una retta (a) passante per C e A
5. Tracciare retta (b) passante per A ruotata di 120° in senso orario rispetto ad (a) (simmetrica)
6. Porre come punto E l'intersezione tra (b) e l'iperbole
7. Tracciare tangente (d) dell'iperbole passante per E

8. Tracciare la retta passante per E e perpendicolare a (d)
9. Punto F come simmetrico di A rispetto ad (e)
10. Tracciare retta (f) passante per F e E

Ecco come si presenta il quadro a lavoro finito

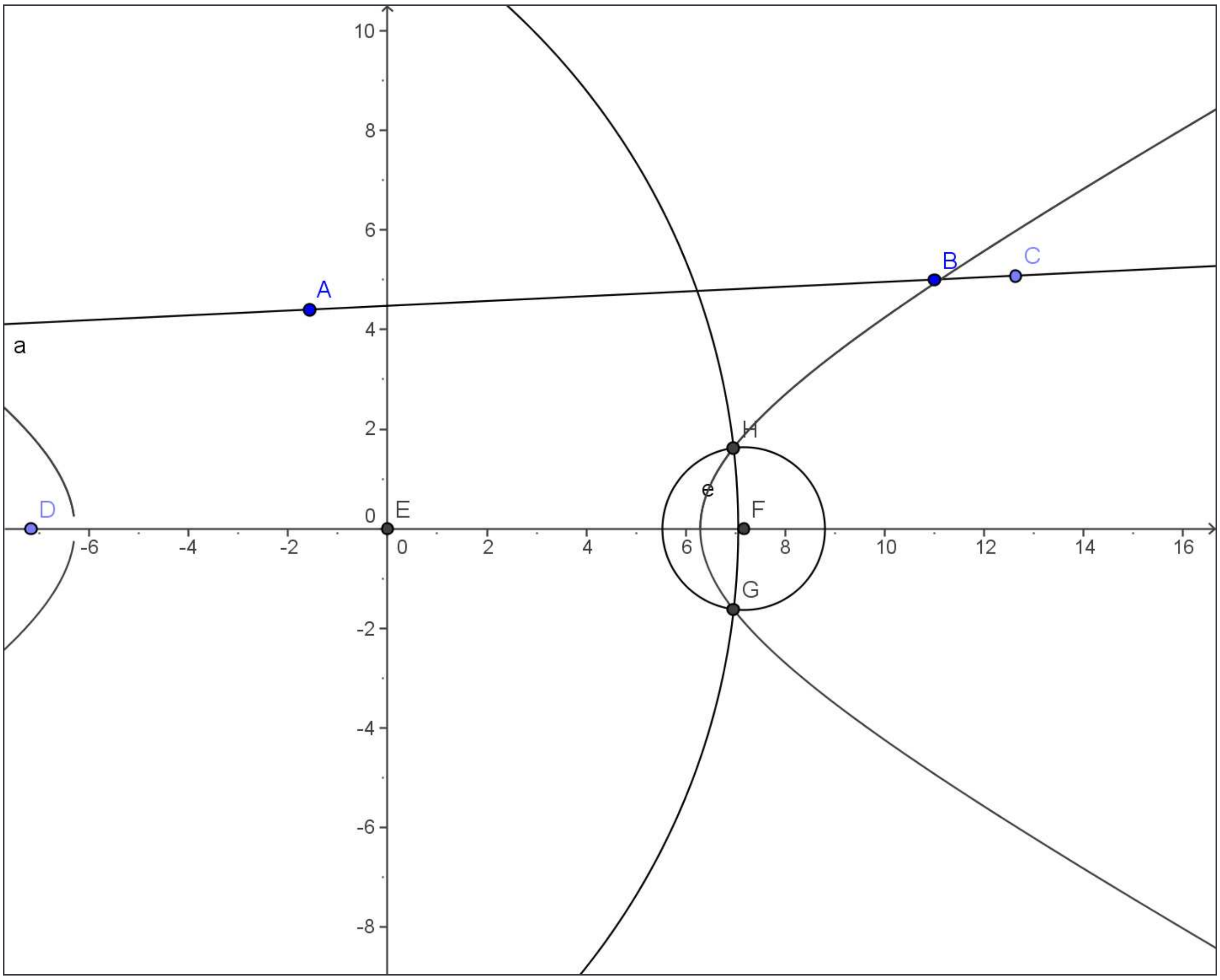


Si nota che la retta (f) finisce sul fuoco dell'altra iperbole. Muovendo il punto E lungo l'iperbole la retta (f) passerà sempre per il punto B. Inoltre se prendiamo il valore assoluto tra la differenza di AE ed EB possiamo notare che ha sempre la stessa misura costante. Perciò si deduce che l'iperbole è il luogo geometrico dei punti tali che la differenza delle distanze dai fuochi rimane costante in valore assoluto.

Costruzione iperbole come luogo geometrico

1. Prendere un punto A nel 4° quadrante e un punto B nel 1° quadrante
2. Tracciare retta (a) passante da A e B
3. Prendere punto C sulla retta (a) situato dopo il punto B
4. Prendere le distanze tra A e C e tra B e C
5. Prendere punto D su asse x nel 4° quadrante e prendere il punto F simmetrico rispetto l'origine degli assi
6. Tracciare circonferenza con centro in D con raggio AC
7. Tracciare circonferenza con centro in F con raggio BC
8. Prendere i punti di intersezione tra le due circonferenze (H,G)
9. Tracciare luogo geometrico di H e C, e G e C

Si avrà un disegno come questo:



Notare che il luogo formatosi è un iperbole.